STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 11 - Itô Formula

Lecturer: Weichen Zhao | Fall 2025

Key concepts:

- *Itô* 过程;
- *Itô* 公式。

11.1 Itô 过程

按照定义计算Itô随机积分是什么繁琐的，如同微积分中的链式法则，随机微积分中也有方便计算的工具——Itô 公式。

我们已经计算过
$$\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$
即
$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t \frac{1}{2}ds + \int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$$
把B_t写成Itô积分的形式
$$\int_0^t dB_s$$
那么$\frac{1}{2}B_t^2$可以看成是函数$f(x) \triangleq \frac{1}{2}x^2$复合Itô积分$\int_0^t dB_s$，即
$$f(\int_0^t dB_s) = \int_0^t \frac{1}{2}ds + \int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$$
然而，我们发现Itô积分经过光滑映射f不再是Itô积分的形式，而是
$$"\int dB_s" + "\int ds"$$
所以我们首先引入$"\int dB_s" + "\int ds"$这种光滑映射下形式稳定的过程。

Definition 11.1 (Itô 过程) 设$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathrm{P})$是一个带流的概率空间，$B_t$是一个$\mathscr{F}_t$适应标准布朗运动，称一个随机过程$X_t$为一个*Itô* 过程，如果$X_t$可以写成

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}s + \int_0^t v_s \mathrm{d}B_s, \tag{11.1}$$

其中$u, v \in \mathscr{L}_T^2$

注1. 形式上的，我们可以把式(11.1)写成微分形式

$$\mathrm{d}X_t = u_t \mathrm{d}t + v_t \mathrm{d}B_t. \tag{11.2}$$

注2. Itô过程的定义可以推广到多维情形。

设 B_t 为一个 m 维布朗运动，X_0 为一个 n 维随机向量，v_s 为一个 $n \times m$ 矩阵，u_s 为一个 n 维向量，那么，多维Itô过程 X_t 为一个 n 维随机向量，每个分量为

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t u_s^i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t v_s^{i,j} dB_s^j, \quad i = 1, ..., n. \tag{11.3}$$

11.2 Itô 公式

回忆Newton-Leibniz公式

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) \mathrm{d}x$$

对于复合函数

$$g(f(b)) - g(f(a)) = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(z) \mathrm{d}z = \int_a^b g'(f(x)) f'(x) \mathrm{d}x = \int_a^b g'(f(x)) \mathrm{d}f(x).$$

那么对于Itô积分, 是否有

$$g(B_t) - g(B_0) = \int_0^t g'(B_s) \mathrm{d}B_s \ ?$$

答案是否定的。还是考虑 $\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$，对于 $g(x) = x^2$

$$B_t^2 - B_0^2 = 2\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s + t \neq \int_0^t g'(B_s) \mathrm{d}B_s.$$

然而对于随机积分有Itô 公式。

Theorem 11.2 (Itô 公式) 设$f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为一个二次连续可微函数，

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}s + \int_0^t v_s \mathrm{d}B_s$$

为一个*Itô* 过程，那么$Y_t \triangleq f(t,X_t)$ 依然是一个*Itô*过程，并且

$$dY_t = df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\cdot(dX_t)^2,$$

其中$(dX_t)^2$ 的运算服从*Itô*乘法规则

$$dt\cdot dt = dt\cdot dB_t = dB_t\cdot dt = 0, \quad dB_t\cdot dB_t = dt.$$

等价地，*Itô*乘法规则计算之后

$$f(t,X_t) - f(0,X_0) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + u_s\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}v_s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\right]ds + \int_0^t v_s\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dB_s.$$

Proof: 为了简化证明，不失一般性，我们不妨考虑两个假设：

(1) $u, v \in \mathscr{L}_0$为简单阶梯过程；

(2) $f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$有界。

设$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$为区间$[0,t]$的一个划分，

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \sum_{i=0}^{n-1}\left[f(t_{i+1},X_{t_{i+1}}) - f(t_i,X_{t_i})\right]$$

对$f(t_{i+1},X_{i+1}) - f(t_i,X_i)$应用Taylor展开，有

$$\begin{aligned} f(t_{i+1},X_{i+1}) - f(t_i,X_i) = & \frac{\partial f(t_i,X_{t_i})}{\partial t}\Delta t_i + \frac{\partial f(t_i,X_{t_i})}{\partial x}\Delta X_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t_i,X_{t_i})}{\partial t^2}(\Delta t_i)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f(t_i,X_{t_i})}{\partial t\partial x}(\Delta t_i)(\Delta X_i) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t_i,X_{t_i})}{\partial x^2}(\Delta X_i)^2 + R_i, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i,\ \Delta X_i = X_{t_{i+1}} - X_{t_i},\ R_i = o(|\Delta t_i|^2 + |\Delta X_i|^2)$$

如果$\Delta t_i \to 0$,

$$\sum_i \frac{\partial f(t_i,X_{t_i})}{\partial t}\Delta t_i \to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\,ds$$

$$\sum_i \frac{\partial f(t_i,X_{t_i})}{\partial x}\Delta X_i \to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,dX_s.$$

由于$(\Delta t_i)(\Delta X_i) \approx (\Delta t_i)^{\frac{3}{2}} \to 0$，$(\Delta t_i)^2 \to 0$，我们只需要处理

$$\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 f(t_i, X_{t_i})}{\partial x^2}(\Delta X_i)^2$$

由于u, v是简单阶梯过程，

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta X_i)^2 = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_i^2(\Delta t_i)^2 + 2\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u_i v_i(\Delta t_i)(\Delta B_i) + \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}v_i^2 \cdot (\Delta B_i)^2, .$$

其中$u_i = u_{t_i}(\omega), v_i = v_{t_i}(\omega)$. 当$\Delta t_i \to 0$时，$(\Delta t_i)^2$, $(\Delta t_i)(\Delta B_i) \to 0$，我们只需处理第三项

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}v_i^2 \cdot (\Delta B_i)^2$$

我们下面证明，在L^2意义下，

$$\lim_{\Delta t_i \to 0}\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}v_i^2 \cdot (\Delta B_i)^2 = \frac{1}{2}\int_0^t v_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}ds, \quad L^2$$

记$a_i = \frac{\partial^2 f(t_i, X_{t_i})}{\partial x^2}(v_{t_i}(\omega))^2$，考察

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i a_i(\Delta B_i)^2 - \sum_i a_i \Delta t_i\Big)^2\Big] = \sum_{i,j}\mathbb{E}[a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)].$$

如果$i < j$，那么 $a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)$，$(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j$独立，又$\Delta B_i \sim N(0, \Delta t_i)$，所以该项期望为0，$i > j$ 时同理。所以仅剩余 $i = j$ 的项，即

$$\begin{aligned}
\sum_i \mathbb{E}[a_i^2((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)^2] &= \sum_i \mathbb{E}[a_i^2] \cdot \mathbb{E}[(\Delta B_i)^4 - 2(\Delta B_i)^2\Delta t_i + (\Delta t_i)^2] \\
&= \sum_i \mathbb{E}[a_i^2] \cdot (3(\Delta t_i)^2 - 2(\Delta t_i)^2 + (\Delta t_i)^2) \\
&= 2\sum_i \mathbb{E}[a_i^2](\Delta t_i)^2 \to 0, \quad \Delta t_i \to 0
\end{aligned}$$

■

Corollary 11.3 设f为二次连续可微函数，则

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\mathrm{d}s,$$

可记成微分形式

$$\mathrm{d}f(B_t) = f'(B_t)\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}f''(B_t)\mathrm{d}t.$$

Proof: 留作作业 ■

Example 11.4 计算

(1) $\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$.

(2) $\int_0^t s \mathrm{d}B_s$

Proof: (1) 对$X_t = B_t$和$f(t,x) = \frac{1}{2}x^2$应用Itô公式：

$$\begin{aligned} d(\frac{1}{2}B_t^2) &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dB_t)^2 \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt. \end{aligned}$$

那么

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t$$

(2) 从经典积分来看，很可能会有tB_t这样的形式，于是我们考虑

$$f(t,x) = tx$$

应用Itô公式

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t + 0 = B_t dt + t dB_t$$

即

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

■

注．这是一种分部积分公式的形式，具体地，Itô积分的分部积分公式为：设$f(s)$对于$s \in [0,t]$是连续的且是有界变差的，那么

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df(s).$$

Theorem 11.5 (多维Itô 公式) 设B为一个m维布朗运动，X为一个n维$It\hat{o}$过程

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t u_s^i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t v_s^{i,j} dB_s^j, \quad i = 1, ..., n.$$

设f为一个$\mathbb{R}^d$值函数并且每个分量二次连续可微。那么过程$Y_t = f(t, X_t)$依然为一个$It\hat{o}$过程，并且对于$k = 1, ..., d$

$$dY_t^k = \frac{\partial f^k}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_t^i dX_t^j. \tag{11.4}$$

Example 11.6 用$It\hat{o}$ 公式证明

$$M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds$$

是鞅

Proof: 设$f(x) = x^3$，那么

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x.$$

对$f(B_t)$应用Itô公式，我们有

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds,$$

即

$$B_t^3 = 3\int_0^t B_s^2 dB_s + 3\int_0^t B_s ds.$$

那么

$$M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds = 3\int_0^t B_s^2 dB_s$$

由于Itô积分$\int_0^t B_s^2 dB_s$为一个鞅，所以M_t为一个鞅 ■

注. $\exp(cB_t - \frac{c^2}{2}t)$是一个鞅，留作作业。

Theorem 11.7 (鞅表示定理) 设B_t为$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$上的标准布朗运动，$M_t$为其上的一个平方可积鞅，那么存在随机过程 $\xi_t \in \mathscr{L}_T^2$ (T可以是无穷)，使得对 $\forall t \geq 0$

$$M_t(\omega) = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t \xi_s(\omega) \mathrm{d}B_s.$$